BAB III
HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini dibahas kembali mengenai definisi dan teorema yang berkaitan dengan pokok bahasan pada skripsi ini yaitu sifat *strongly nil clean* pada elemen dan ring. Pembahasan pada skripsi ini dibahas mengenai ring dengan elemen satuan 1 dan dikutip dari artikel Diesl (2013) dan Kosan, dkk. (2016).

3.1 *Elemen Strongly Nil Clean*

Berikut diberikan definisi, teorema, lemma, akibat dan proposisi yang berkaitan dengan sifat-sifat dari *strongly nil clean* yang dikutip dari Diesl (2013) dan Tamer, dkk. (2016).

Definisi 3.1.1 (*Elemen Strongly Nil Clean)*
Misalkan R adalah suatu ring dan $r \in R$. Elemen r disebut dengan *strongly nil clean* jika memenuhi $r = n + d$ dan $nd = dn$ dengan $n \in N(R)$ dan $d \in Id(R)$.

Ekspresi $r = n + d$ tersebut dikatakan sebagai dekomposisi *strongly nil clean* dari r di R.

Contoh 3.1.2
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. $Id(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dan $N(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$. Tentukan $r \in \mathbb{Z}_8$ sedemikian sehingga r adalah *strongly nil clean*.
Bukti.
Berdasarkan Tabel 2.17 pada Contoh 2.5.21 telah dibuktikan $r \in \mathbb{Z}_8$ sedemikian sehingga r adalah *nil clean*. Selanjutnya untuk menentukan $r \in \mathbb{Z}_8$ sedemikian sehingga adalah *strongly nil clean* yaitu dengan memeriksa apakah berlaku $nd = dn$ dengan $n \in N(\mathbb{Z}_8)$ dan $d \in Id(\mathbb{Z}_8)$. Diketahui bahwa $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan sehingga untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $ab = ba$, jadi $nd = dn$ dengan $n \in N(R)$ dan $d \in Id(R)$ terpenuhi, sehingga dapat ditentukan himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_8$ adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$.

Contoh 3.1.3
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$. $Id(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$ dan $N(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}\}$. Tentukan $r \in \mathbb{Z}_6$ sedemikian sehingga r adalah *strongly nil clean*.
Bukti.
Berdasarkan Tabel 2.18 pada Contoh 2.5.22 telah dibuktikan $r \in \mathbb{Z}_6$ sedemikian sehingga r adalah *nil clean* yaitu ditentukan himpunan elemen *nil clean* di $\mathbb{Z}_6$ adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$.
Selanjutnya untuk menentukan $r \in \mathbb{Z}_6$ adalah *strongly nil clean* yaitu dengan berlaku $nd = dn$ dengan $n \in N(\mathbb{Z}_8)$ dan $d \in Id(\mathbb{Z}_8)$. Diketahui bahwa $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan sehingga untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $ab = ba$, jadi $nd = dn$ dengan $n \in N(R)$ dan $d \in Id(R)$ terpenuhi, sehingga dapat ditentukan himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6$ adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$.

Contoh 3.1.4
Diberikan ring $(P(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ dengan $Id\big(P(\mathbb{Z})\big) = P(\mathbb{Z})$ dan $N\big(P(\mathbb{Z})\big) = \{\emptyset\}$. Tentukan $A \in P(\mathbb{Z})$ sedemikian sehingga A adalah *strongly nil clean*.
Bukti.
Berdasarkan Contoh 2.5.26, telah dibuktikan $P(\mathbb{Z})$ adalah ring *nil clean*. Selanjutnya akan ditentukan $A \in P(\mathbb{Z})$ sedemikian sehingga A adalah *strongly nil clean* yaitu dengan menyelidiki berlaku $nd = dn$. Diketahui bahwa $(P(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ adalah ring komutatif sehingga untuk setiap $A, B \in P(\mathbb{Z})$ berlaku $AB = BA$, jadi $nd = dn$ terpenuhi dengan $n \in N(R)$ dan $d \in Id(R)$, sehingga dapat ditentukan elemen-elemen *strongly nil clean* di $P(\mathbb{Z})$ adalah semua elemen di $P(\mathbb{Z})$.

Contoh 3.1.5
Diberikan ring $(M_2(\mathbb{Z}_2), +, \cdot)$. Selidiki $A \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ sedemikian sehingga A adalah *strongly nil clean*.
Bukti.
Berdasarkan Contoh 2.5.27 telah dibuktikan bahwa bahwa $(M_2(\mathbb{Z}_2), +, \cdot)$ adalah ring *nil clean*. Berdasarkan Contoh 2.3.13, $(M_2(\mathbb{Z}_2), +, \cdot)$ bukan ring komutatif, sehingga terdapat $ND \neq DN$ dengan $N \in N(R)$ dan $D \in Id(R)$. Selanjutnya akan diselidiki himpunan elemen dari $M_2(\mathbb{Z}_2)$ sedemikian sehingga merupakan *strongly nil clean*.

Tabel 3.1 Hasil dari $R = N + D$ di $M_2(\mathbb{Z}_2)$

$R \in M_2(\mathbb{Z}_2)$	$R = N + D$	Apakah $ND = DN$
A	$A + A$	Ya
B	$B + A$	Ya
	$L + C$	Tidak
	$N + D$	Tidak
C	$A + C$	Ya
	$P + D$	Tidak
D	$A + D$	Ya
	$P + C$	Tidak
E	$E + A$	Ya
	$K + D$	Tidak
	$M + C$	Tidak
F	$A + F$	Ya
G	$B + F$	Tidak
	$K + C$	Tidak
H	$O + D$	Ya
I	$O + C$	Ya
J	$L + D$	Tidak
	$E + F$	Tidak
K	$K + A$	Ya
	$E + D$	Tidak
	$L + F$	Tidak
	$M + D$	Tidak
L	$L + A$	Ya
	$K + F$	Tidak
	$B + C$	Tidak
M	$M + A$	Ya
	$N + F$	Tidak
	$E + C$	Tidak
N	$N + A$	Ya
	$M + F$	Tidak
	$B + D$	Tidak
O	$O + A$	Ya
	$P + F$	Ya
P	$P + A$	Ya
	$O + F$	Ya

Jadi, berdasarkan Tabel 3.1, diperoleh himpunan elemen $M_2(\mathbb{Z}_2)$ yaitu $\{A, B, C, D, E, F, H, I, K, L, M, N, O, P\}$ yang memenuhi *strongly nil clean*.

Proposisi 3.1.6
Misalkan R adalah suatu ring dan $r \in R$. Jika r adalah elemen *strongly nil clean*, maka r adalah elemen *strongly π-regular.*
Bukti.
Diketahui r merupakan elemen *strongly nil clean*, sehingga memiliki dekomposisi yaitu $r = n + d$ dengan $n \in N(R)$ dan $d \in Id(R)$ serta memenuhi $nd = dn$. Oleh karena itu, diperoleh $r = n + d = (2d - 1 + n) + (1 - d)$. Berdasarkan Lemma 2.4.33 dan Lemma 2.4.7, $(2d - 1 + n) \in U(R)$ dan $(1 - d) \in Id(R)$ maka r merupakan dekomposisi *strongly π-regular* untuk r. ■

Contoh 3.1.7
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ dengan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Diketahui $Id(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$, $U(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{1}, \bar{5}\}$ dan diketahui $N(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}\}$. Berdasarkan Contoh 3.1.3 himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6$ adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Kemudian selidiki apakah elemen-elemen tersebut merupakan elemen *strongly π-regular.*
Bukti.
Akan diselidiki apakah elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6$ tersebut merupakan elemen *strongly π-regular*. Berdasarkan Proposisi 2.5.37 diketahui dekomposisi elemen *strongly clean* sama dengan dekomposisi elemen *strongly π-regular*. Kemudian, berdasarkan Contoh 2.5.12 diketahui himpunan elemen *strongly clean* di $\mathbb{Z}_6$ adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, sehingga $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\} \subseteq \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Oleh karena itu himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6$, juga elemen *strongly π-regular.*

Proposisi 3.1.8
Misalkan R adalah suatu ring dan $r \in R$. Jika r adalah elemen *strongly nil clean*, maka r adalah *strongly clean.*
Bukti.
Diketahui r merupakan elemen elemen *strongly nil clean,* sehingga memiliki dekomposisi yaitu $r = n + d$ dengan $n \in N(R)$ dan $d \in Id(R)$ serta memenuhi $nd = dn$. Oleh karena itu, diperoleh $r = n + d = (2d - 1 + n) + (1 - d)$. Berdasarkan Lemma 2.4.33

dan Lemma 2.4.7, $(2d-1+n) \in U(R)$ dan $(1-d) \in Id(R)$ maka r merupakan dekomposisi *strongly clean* untuk r. ■

Contoh 3.1.9

Diberikan ring $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ dengan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$. Diketahui $Id(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0},\bar{1},\bar{3},\bar{4}\}$, $U(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{1},\bar{5}\}$ dan diketahui $N(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}\}$. Berdasarkan Contoh 3.1.3 himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6$ adalah $\{\bar{0},\bar{1},\bar{3},\bar{4}\}$. Kemudian selidiki apakah elemen-elemen tersebut merupakan elemen *strongly clean*.

Bukti.

Berdasarkan Contoh 2.5.12 diketahui himpunan elemen *strongly clean* di $\mathbb{Z}_6$ adalah $\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$, sehingga $\{\bar{0},\bar{1},\bar{3},\bar{4}\} \subseteq \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$. Oleh karena itu himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6$, juga elemen *strongly clean*.

Proposisi 3.1.10

Misalkan R adalah suatu ring, $r \in R$ dan r adalah elemen *strongly* π*-regular* yang memiliki dekomposisi yaitu $r = u + d$. Elemen r merupakan *strongly nil clean* jika dan hanya jika $2d-1+u$ adalah nilpoten.

Bukti.

($\Longrightarrow$)Diketahui bahwa r adalah *strongly nil clean*, sehingga memiliki dekomposisi yaitu $r = n + f$ dengan $n \in N(R)$ dan $f \in Id(R)$ serta memenuhi $nf = fn$. Akan ditunjukkan $2d-1+u$ adalah nilpoten. Berdasarkan bukti dari Proposisi 3.1.6, dapat bentuk suatu dekomposisi *strongly* π*-regular* untuk r yaitu $r = (2f-1+n)+(1-f)$, sedemikian sehingga $(2f-1+n) \in U(R)$ dan $(1-f) \in Id(R)$. Kemudian berdasarkan bukti dari Proposisi 2.5.38, Lemma 2.4.7 dan Lemma 2.4.33, dapat dibentuk $d = 1-f$ dan $u = 2f-1+n$ sedemikian sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 2d-1+u &= 2(1-f)-1+(2f-1+n) \\ &= (2-2f)-1+(2f-1+n) \\ &= 2-2f-1+2f-1+n = n. \end{aligned}$$

Jadi, $2d-1+u$ adalah nilpoten.

($\Longleftarrow$)Diketahui $2d-1+u$ adalah nilpoten, sehingga $r = n + d = (2d-1+u)+(1-d)$ secara jelas merupakan dekomposisi *strongly nil clean*, karena $2d-1+u \in N(R)$ dan $1-d \in Id(R)$. Maka pernyataan tersebut berlaku.

Contoh 3.1.11

Diberikan ring $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ dengan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Berdasarkan Contoh 3.1.7 diketahui himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6$ yaitu $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$, juga elemen *strongly π-regular.* Akan diselidiki himpunan elemen tersebut merupakan *strongly nil clean* dengan membuktikan $2d - 1 + u$ adalah nilpoten.

Bukti.

Diketahui $Id(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$, $U(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{1}, \bar{5}\}$ dan diketahui $N(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}\}$. Akan diselidiki $2d - 1 + u$ adalah nilpoten.

Tabel 3.2 Hasil operasi $2d - 1 + u$ di $\mathbb{Z}_6$.

$d \in Id(\mathbb{Z}_6)$	$2d$	$u \in U(\mathbb{Z}_6)$	$2d - \bar{1} + u$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
		$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
		$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
		$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
		$\bar{5}$	$\bar{0}$

Oleh karena itu himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6$ yaitu $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$ adalah elemen *strongly nil clean.*

Teorema 3.1.12

Misalkan R merupakan suatu ring dan $r \in R$. Elemen r merupakan *strongly nil clean* jika dan hanya jika r merupakan *strongly clean* di R dan $r - r^2$ merupakan suatu *nilpoten*.

Bukti.

$(\Longrightarrow)$ Diketahui $r \in R$ adalah *strongly nil clean* di R, sedemikian sehingga r memiliki dekomposisi *strongly nil clean* yaitu $r = n + d = (2d - 1 + n) + (1 - d)$ dengan $n \in N(R)$ dan $d \in Id(R)$ serta memenuhi $nd = dn$.

Berdasarkan Proposisi 3.1.8, r merupakan *strongly clean* di R. Selanjutnya, akan ditunjukkan $r - r^2$ adalah nilpoten. Diketahui, r memiliki dekomposisi *strongly nil clean* yaitu $r = n + d$, sehingga

$r^2 = (n + d)^2 = n^2 + 2dn + d^2 = n^2 + 2dn + d$, kemudian,

$$r - r^2 = (n + d) - (n^2 + 2dn + d)$$
$$= n - n^2 - 2d = (1 - n - 2d)n.$$

Berdasarkan Lemma 2.4.16, karena $1 - n - 2d \in R$ dan $n \in N(R)$ sehingga $(1 - n - 2d)n$ adalah nilpoten.

($\Longleftarrow$) Diketahui $r \in R$ adalah *strongly clean* di R dan $r - r^2$ adalah nilpoten, sehingga r memilki dekomposisi *strongly clean* yaitu $r = u + d$. $r = u + d$ sehingga

$r^2 = (u + d)^2 = u^2 - 2du + d^2 = u^2 - 2du + d$

dan diperoleh $r - r^2 = (u + d) - (u^2 + 2du + d\ )$

$= (u - u^2 - 2du)$

$= u(1 - u - 2d)$ adalah nilpoten

Diketahui $u(1 - u - 2d)$ adalah nilpoten sehingga berdasarkan Lemma 2.4.16 dan Proposisi 3.1.10, $(1 - u - 2d)$ adalah nilpoten. Kemudian, berdasarkan Lemma 2.4.7,

$r = (-1 + u + 2d) + (1 - d) = n + d$

merupakan dekomposisi *strongly nil clean* untuk r. ■

Contoh 3.1.13

Diberikan $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ adalah *strongly nil clean* dengan $Id(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dan $N(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$. Himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_8$ adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$. Selidiki apakah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ adalah *strongly clean* di $\mathbb{Z}_8$ dan $r - r^2$ adalah suatu *nilpotent.*

Bukti

berdasarkan Contoh 2.5.11, dibuktikan $r \in \mathbb{Z}_8$ sedemikian sehingga r adalah *strongly clean* dengan membuat tabel penjumlahan antara idempoten dan unit dari $\mathbb{Z}_8$. Selanjutnya akan dibuktikan $r - r^2$ adalah suatu *nilpotent.*

Tabel 3.3 Hasil dari $r - r^2$ dengan $r \in \mathbb{Z}_8$.

$r \in \mathbb{Z}_8$	r^2	$r - r^2$
$\bar{0}$	$\bar{0}^2 = \bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}^2 = \bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}^2 = \bar{4}$	$\bar{6}$
$\bar{3}$	$\bar{3}^2 = \bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}^2 = \bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{5}$	$\bar{5}^2 = \bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}^2 = 4$	$\bar{2}$
$\bar{7}$	$\bar{7}^2 = \bar{1}$	$\bar{6}$

Berdasarkan Tabel 3.3, terbukti bahwa $r - r^2$ adalah suatu *nilpotent* dari $\mathbb{Z}_8$ yaitu $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$.

Contoh 3.1.14

Diberikan ring komutatif dengan elemen satuan $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ dengan $Id(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$ dan $N(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}\}$. Selidiki elemen-elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6$ memenuhi *strongly clean* di $\mathbb{Z}_6$ dan $r - r^2$ adalah suatu *nilpotent.*

Bukti

Berdasarkan Contoh 3.1.3, himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6$ adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$ dan berdasarkan Contoh 2.5.12, telah dibuktikan himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6$ merupakan dekomposisi *strongly clean* di $\mathbb{Z}_6$. Selanjutnya akan ditunjukkan $r - r^2$ merupakan suatu nilpoten.

Tabel 3.4 Hasil dari $r - r^2$, dengan $r \in \mathbb{Z}_6$.

$r \in \mathbb{Z}_6$	r^2	$r - r^2$
$\bar{0}$	$\bar{0}^2 = \bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}^2 = \bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{3}^2 = \bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{4}^2 = \bar{4}$	$\bar{0}$

Berdasarkan Tabel 3.4, terbukti bahwa $r - r^2$ adalah suatu nilpotent dari $\mathbb{Z}_6$ yaitu $\bar{0}$.

Contoh 3.1.15

Diberikan ring $(P(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ dengan $Id(P(\mathbb{Z})) = P(\mathbb{Z})$ dan $N(P(\mathbb{Z})) = \{\emptyset\}$. Selidiki apakah elemen-elemen *strongly nil clean* di $P(\mathbb{Z})$ memenuhi *strongly clean* di $P(\mathbb{Z})$ dan dan $r - r^2$ adalah suatu *nilpotent.*

Bukti

Berdasarkan Contoh 3.1.4, diperoleh untuk setiap $A \in P(\mathbb{Z})$ dapat ditulis sebagai jumlahan dari nilpoten dan idempoten di $P(\mathbb{Z})$, sedemikian sehingga untuk setiap $A \in P(\mathbb{Z})$ adalah *strongly nil clean* di $P(\mathbb{Z})$. Selanjutnya, berdasarkan Contoh 2.5.18, telah dibuktikan bahwa untuk setiap $A \in P(\mathbb{Z})$ merupakan *strongly clean*, sehingga himpunan elemen *strongly nil clean* di $P(\mathbb{Z})$ merupakan dekomposisi *strongly clean* di $P(\mathbb{Z})$. kemudian akan ditunjukkan $r - r^2$ merupakan suatu nilpotent, untuk setiap $A \in P(\mathbb{Z})$ diperoleh

$$A - A^2 = A - A = \emptyset$$

diketahui $P(\mathbb{Z})$ adalah ring boolean sehingga untuk setiap $A \in P(\mathbb{Z})$ berlaku $A^2 = A$. Jadi, terbukti bahwa $r - r^2$ adalah suatu nilpotent $P(\mathbb{Z})$ yaitu $\emptyset$.

Lemma 3.1.16

Jika R adalah suatu ring dan $r \in R$. Jika r adalah suatu elemen *strongly nil clean* dari R maka berlaku pernyataan berikut.

1. Elemen r mempunyai suatu dekomposisi *strongly nil clean* yang tunggal di R
2. Elemen r adalah suatu *strongly π-regular* dari R
3. Elemen r adalah suatu *strongly clean* yang tunggal dari R.

Bukti.

1. Diketahui dan r adalah suatu elemen *strongly nil clean* di R. Berdasarkan Proposisi 3.1.6, r adalah *strongly π-regular* dan berdasarkan Proposisi 2.5.38, *strongly π-regular* memiliki dekomposisi yang tunggal. Oleh karena itu, r memiliki dekomposisi *strongly nil clean* yang tunggal.
2. Diketahui r adalah suatu elemen *strongly nil clean* di R, sehingga berdasarkan Proposisi 3.1.6, elemen r juga merupakan *strongly π-regular* dari R.
3. Diketahui dan r adalah suatu elemen *strongly nil clean* di R dan berdasarkan Teorema 3.1.12, mengatakan bahwa r juga merupakan *strongly clean* di R dan $r - r^2$ adalah suatu *nilpotent*. Akan ditunjukkan r adalah suatu *strongly clean* yang tunggal dari R. Hal ini berlaku, karena berdasarkan bukti Teorema 3.1.12, semestinya dua idempoten berbeda yang membentuk dekomposisi *strongly clean* dari r menghasilkan dua idempoten berbeda yang membentuk dekomposisi *strongly nil clean* dari r, namun pada bukti, namun hal tersebut tidak memenuhi. Oleh karena itu, r adalah suatu *strongly clean* yang tunggal dari R. ■

Contoh 3.1.17

Diberikan ring $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ dengan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Berdasarkan Contoh 3.1.3 diketahui himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6$ yaitu $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Akan ditunjukkan himpunan elemen tersebut memenuhi pertanyaan pada Lemma 3.1.16.

1. Berdasarkan Contoh 2.5.22 dan Contoh 3.1.3 terbukti untuk himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6$ yaitu $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$ adalah dekomposisi *strongly nil clean* yang tunggal di $\mathbb{Z}_6$

2. Berdasarkan Contoh 3.1.7 himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6$ yaitu $\{\overline{0},\overline{1},\overline{3},\overline{4}\}$ juga merupakan suatu dekomposisi *strongly π-regular* dari $\mathbb{Z}_6$.
3. Berdasarkan Contoh 2.5.5 diperoleh elemen $\overline{0}$ merupakan hasil dekomposisi dari $\overline{5}+\overline{1}$, elemen $\overline{1}$ merupakan hasil dekomposisi dari $\overline{1}+\overline{0}$, elemen $\overline{3}$ merupakan hasil dekomposisi dari $\overline{5}+\overline{4}$ dan elemen $\overline{4}$ merupakan hasil dekomposisi dari $\overline{1}+\overline{3}$.

Proposisi 3.1.18
Misalkan R adalah ring, I adalah nil ideal di R. Jika $\bar{r}\in R/I$ adalah *strongly nil clean* maka $r\in R$ *strongly nil clean*.
Bukti.
Diketahui $\bar{r}\in R/I$ adalah *strongly nil clean*, sehingga memiliki dekomposisi $\bar{r}=\bar{n}+\bar{d}$ dengan $\bar{n}=n+I\in N(R/I)$ dan $\bar{d}=d+I\in Id(R/I)$ serta memenuhi $\bar{n}\bar{d}=\bar{d}\bar{n}$. Berdasarkan Proposisi 3.1.6, $\bar{r}$ dapat dinyatakan sebagai dekomposisi *strongly π-regular* yaitu $\bar{r}=\bar{n}+\bar{d}=\left(\overline{2d-1+n}\right)+\left(\overline{1-d}\right)$, sehingga berdasarkan Lemma 2.4.18, untuk $\bar{d}=d+I\in Id(R/I)$ terdapat $d\in Id(R)$ dan $n=r-d\in N(R)$ sehingga r adalah *strongly nil clean*. ■

Contoh 3.1.19
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ dengan $I=\{\overline{0}\}$ adalah nil ideal. Berdasarkan Definisi 2.3.23 diperoleh himpunan koset $\mathbb{Z}_6/I$ adalah $\{\overline{0}+I,\overline{1}+I,\overline{2}+I,\overline{3}+I,\overline{4}+I,\overline{5}+I\}$, sehingga diperoleh $Id(\mathbb{Z}_6/I)=\{\overline{0}+I,\overline{1}+I,\overline{3}+I,\overline{4}+I\}$, $N(\mathbb{Z}_6/I)=\{\overline{0}+I\}$ dan $U(\mathbb{Z}_6/I)=\{\overline{1}+I,\overline{5}+I\}$. Himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6/I$ adalah $\{\overline{0}+I,\overline{1}+I,\overline{3}+I,\overline{4}+I\}$. Akan dibuktikan $r\in\mathbb{Z}_6$ *strongly nil clean*.
Bukti.
Himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6/I$ adalah $\{\overline{0}+I,\overline{1}+I,\overline{3}+I,\overline{4}+I\}$. Akan dibuktikan $r\in\mathbb{Z}_6$ *strongly nil clean*. Berdasarkan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6/I$ yaitu $\bar{r}$ diperoleh elemen r yaitu $\overline{0},\overline{1},\overline{3}$ dan $\overline{4}$. Berdasarkan Contoh 3.1.3 $\overline{0},\overline{1},\overline{3}$ dan $\overline{4}$ adalah elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa Lemma 2.4.30 yaitu Lemma Jacobson memegang peranan penting dalam sifat suatu elemen *strongly nil clean.*

Teorema 3.1.20
Misalkan R adalah suatu ring dan $a, b \in R$. Jika ab adalah *strongly nil clean*, maka ba adalah *strongly nil clean*.
Bukti.
Berdasarkan Teorema 2.5.14, ab adalah *strongly clean* jika dan hanya jika ba adalah *strongly clean.* Akan ditunjukkan ab adalah *strongly nil clean*, maka berlaku pula pada ba. Diketahui ab adalah *strongly nil* sedemikian sehingga memiliki dekomposisi $ab = n + d$ serta memenuhi $nd = dn$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $ab - (ab)^2$ adalah suatu nilpoten jika dan hanya jika $ba - (ba)^2$ adalah suatu nilpoten. Hal ini jelas karena

$$[ab - (ab)^2]^{n+1} = a[ba - (ba)^2]^n(bab - b)$$

untuk sembarang $a, b \in R$. ■

Contoh 3.1.21
Diketahui pada Contoh 3.1.2, ring $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ dan $r \in \mathbb{Z}_8$ sedemikian sehingga r adalah *strongly nil clean* adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$. Akan ditunjukkan untuk $a, b \in R$, jika ab adalah *strongly nil clean*, maka ba adalah *strongly nil clean*.
Bukti
Berdasarkan Tabel 2.3 yaitu operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_8$, dibuktikan untuk $a, b \in \mathbb{Z}_8$, sedemikian sehingga ab adalah *strongly nil clean* dan berlaku pula pada ba. Hal ini terpenuhi karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_8$ memenuhi sifat tertutup dan komutatif terhadap operasi pergandaan.

Contoh 3.1.22
Diketahui pada Contoh 3.1.3, ring $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, $r \in \mathbb{Z}_6$ sedemikian sehingga r adalah *strongly nil clean* adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Akan ditunjukkan jika ab adalah *strongly nil clean*, maka ba adalah *strongly nil clean*, untuk $a, b \in R$.
Bukti
Akan dibuktikan untuk $a, b \in \mathbb{Z}_6$, jika ab adalah *strongly nil clean* maka berlaku pula pada ba, dengan membuat tabel pergandaan antara elemen dari $\mathbb{Z}_6$.

Tabel 3.5 Operasi pergandaan antara elemen dari $\mathbb{Z}_6$.

$\cdot$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$

Berdasarkan Tabel 3.5, terbukti bahwa untuk $a, b \in \mathbb{Z}_6$, jika ab adalah *strongly nil clean*, maka berlaku pula pada ba. Hal ini terpenuhi karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_6$ memenuhi sifat tertutup dan komutatif terhadap operasi pergandaan.

Contoh 3.1.23
Diketahui pada Contoh 3.1.4, ring $(P(\mathbb{Z}), +, \cdot)$, memenuhi untuk setiap $A \in P(\mathbb{Z})$ sedemikian sehingga A adalah *strongly nil clean*. Akan ditunjukkan untuk $A, B \in P(\mathbb{Z})$, jika AB adalah *strongly nil clean*, maka BA adalah *strongly nil clean*.
Bukti
Untuk $A, B \in P(\mathbb{Z})$ sedemikian sehingga AB adalah *strongly nil clean* dan berlaku pula pada BA, hal ini terpenuhi karena untuk setiap $A, B \in P(\mathbb{Z})$ memenuhi sifat tertutup dan komutatif terhadap operasi pergandaan.

Akibat 3.1.24
Misalkan R adalah ring dan $a, b \in R$. Jika $1 - ab$ merupakan *strongly nil clean*, maka $1 - ba$ juga merupakan *strongly nil clean*.
Bukti.
Diketahui untuk $x \in R$ *strongly nil clean*, maka $1 - x$ strongly nil clean. Berdasarkan Teorema 3.1.20, karena ab *strongly nil clean* maka diperoleh ba juga *strongly nil clean*. Oleh sebab itu, $1 - ba$ adalah *strongly nil clean*. ■

Contoh 3.1.25
Diketahui pada Contoh 3.1.2, ring komutatif dengan elemen satuan $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. $r \in \mathbb{Z}_8$ sedemikian sehingga r adalah *strongly nil clean* adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$. Akan ditunjukkan untuk $a, b \in \mathbb{Z}_8$, jika $1 - ab$ adalah *strongly nil clean*, maka $1 - ba$ juga merupakan *strongly nil clean*.

Bukti
Ketentuan diatas akan dibuktikan menggunakan tabel operasi berikut.

Tabel 3.6 Hasil dari $1 - ab$ di $\mathbb{Z}_8$.

$1 - ab$	$\overline{\mathbf{0}}$	$\overline{\mathbf{1}}$	$\overline{\mathbf{2}}$	$\overline{\mathbf{3}}$	$\overline{\mathbf{4}}$	$\overline{\mathbf{5}}$	$\overline{\mathbf{6}}$	$\overline{\mathbf{7}}$
$\overline{\mathbf{0}}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$
$\overline{\mathbf{1}}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$
$\overline{\mathbf{2}}$	$\overline{1}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$
$\overline{\mathbf{3}}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$
$\overline{\mathbf{4}}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$
$\overline{\mathbf{5}}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$
$\overline{\mathbf{6}}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$
$\overline{\mathbf{7}}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$

Berdasarkan Tabel 3.6, terbukti bahwa untuk $a, b \in \mathbb{Z}_8$, jika $1 - ab$ adalah *strongly nil clean*, maka berlaku pula pada $1 - ba$. Hal ini terpenuhi karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_8$ memenuhi sifat tertutup dan komutatif terhadap operasi pergandaan.
Misal diberikan $a = \overline{7}$ dan $b = \overline{3}$, akan ditunjukkan jika $1 - ab$ adalah *strongly nil clean*, maka $1 - ba$ juga merupakan *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_8$. Seperti berikut,

$$\begin{aligned} 1 - (\overline{7})(\overline{3}) &= \overline{4} \\ &= 1 - (\overline{3})(\overline{7}) \end{aligned}$$

Jadi, ketentuan tersebut berlaku.

Contoh 3.1.26
Diketahui pada Contoh 3.1.3, ring komutatif dengan elemen satuan $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$. $r \in \mathbb{Z}_6$ sedemikian sehingga r adalah *strongly nil clean* adalah $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{3}, \overline{4}\}$. Akan ditunjukkan untuk $a, b \in \mathbb{Z}_6$, jika $1 - ab$ adalah *strongly nil clean*, maka $1 - ba$ juga merupakan *strongly nil clean*.
Bukti
Ketentuan diatas akan dibuktikan menggunakan tabel operasi berikut.

Tabel 3.7 Hasil dari $1 - ab$ di $\mathbb{Z}_6$.

$1 - ab$	$\overline{\mathbf{0}}$	$\overline{\mathbf{1}}$	$\overline{\mathbf{2}}$	$\overline{\mathbf{3}}$	$\overline{\mathbf{4}}$	$\overline{\mathbf{5}}$
$\overline{\mathbf{0}}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$
$\overline{\mathbf{1}}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$
$\overline{\mathbf{2}}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$

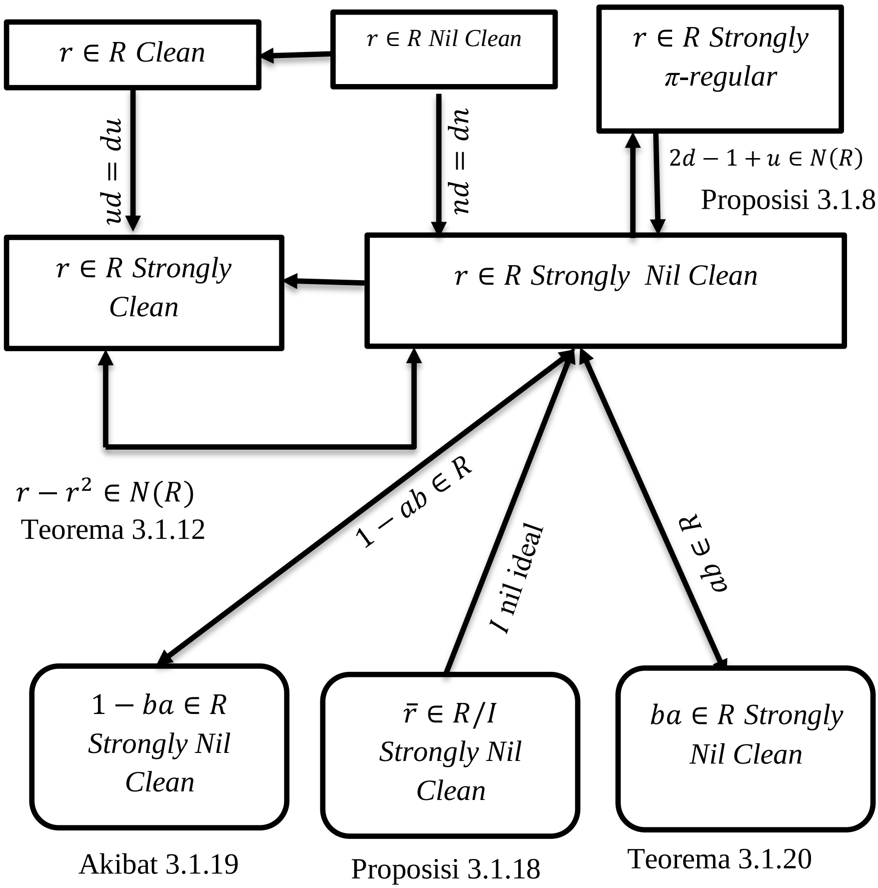
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$

Berdasarkan Tabel 3.7, terbukti bahwa untuk $a, b \in \mathbb{Z}_6$, jika $1 - ab$ adalah *strongly nil clean*, maka berlaku pula pada $1 - ba$. Hal ini terpenuhi karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_6$ memenuhi sifat tertutup dan komutatif terhadap operasi pergandaan.
Misal diberikan $a = \bar{5}$ dan $b = \bar{3}$, akan ditunjukkan jika $1 - ab$ adalah *strongly nil clean*, maka $1 - ba$ juga merupakan *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_6$. Seperti berikut,

$$\begin{aligned} 1 - (\bar{5})(\bar{3}) &= \bar{4} \\ &= 1 - (\bar{3})(\bar{5}) \end{aligned}$$

Jadi, ketentuan tersebut berlaku.

Dari Proposisi, Teorema dan Lemma yang sudah dibahas, dapat dibuat diagram hubungan sifat *strongly nil clean* pada suatu elemen dalam ring.



Gambar 3.1 Hubungan Elemen *Clean*, *Strongly Clean*, *Nil Clean*, *Strongly π-regular dan Strongly Nil Clean* dalam Suatu Ring.

Pada Gambar 3.2 dijelaskan, jika $r \in R$ bersifat *nil clean* maka r bersifat *clean* dan belum tentu berlaku sebaliknya. $r \in R$ yang bersifat *clean* menjadi *strongly clean* jika elemen idempoten dan unit saling komutatif terhadap pergandaan. $r \in R$ yang bersifat *nil clean* menjadi *strongly nil clean* jika elemen idempoten dan nilpoten saling komutatif terhadap pergandaan. Jika $r \in R$ bersifat *strongly nil clean* maka $r \in R$ bersifat *strongly clean* karena dekomposisi *strongly nil clean* dapat dibentuk sedemikian sehingga menjadi dekomposisi *strongly clean*. Kemudian, diketahui $r \in R$ *strongly* π*-regular* merupakan *strongly nil clean* jika $2d - 1 + u$ merupakan nilpoten. $r \in R$ *strongly nil clean* merupakan *strongly* π*-regular* karena dekomposisi *strongly nil clean* dapat dibentuk sedemikian sehingga menjadi dekomposisi *strongly* π*-regular*. Jika $r \in R$ bersifat *strongly nil clean* maka $r \in R$ bersifat *strongly clean* dan $r - r^2$ adalah nilpoten dan berlaku sebaliknya. Selanjutnya, jika $r \in R$ *strongly nil clean* dan $1 - ab \in R$ maka $1 - ba$ juga *strongly nil clean*, dan berlaku sebaliknya. Jika $r \in R$ *strongly nil clean* dan $ab \in R$ maka ba juga *strongly nil clean*, dan berlaku sebaliknya. jika $r \in R$ *strongly nil clean* dan memiliki I yang merupakan nil ideal maka terdapat $\bar{r} \in R/I$ yang merupakan *strongly nil clean*.

3.2 Ring *Strongly Nil Clean*.

Berikut diberikan definisi dan teorema yang berkaitan dengan sifat-sifat dari ring *strongly nil clean* yang dikutip dari Diesl (2013) dan Tamer, dkk., (2016).

Definisi 3.2.1 (*Ring Strongly Nil Clean*)
Misalkan R adalah suatu ring dan $r \in R$. R disebut *strongly nil clean*, jika setiap $r \in R$ merupakan elemen *strongly nil clean*.

Contoh 3.2.2
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. $Id(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dan $N(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$. Selidiki apakah $\mathbb{Z}_8$ merupakan ring *strongly nil clean*.
Bukti.
Berdasarkan Contoh 3.1.2 dapat disimpulkan bahwa setiap $r \in \mathbb{Z}_8$ bersifat *strongly nil clean*, sehingga $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ merupakan ring *strongly nil clean*.

Contoh 3.2.3
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$. $Id(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$ dan $N(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}\}$. Selidiki apakah $\mathbb{Z}_6$ merupakan ring *strongly nil clean.*
Bukti.
Berdasarkan Contoh 3.1.3 dapat disimpulkan bahwa tidak setiap $r \in \mathbb{Z}_6$ bersifat *strongly nil clean*, sehingga $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ bukan merupakan ring *strongly nil clean.*

Contoh 3.2.4
Diberikan ring $(P(\mathbb{Z}), +, \cdot)$. $Id\big(P(\mathbb{Z})\big) = P(\mathbb{Z})$ dan $N\big(P(\mathbb{Z})\big) = \{\emptyset\}$. Selidiki apakah $P(\mathbb{Z})$ merupakan ring *strongly nil clean.*
Bukti.
Berdasarkan Contoh 3.1.4 dapat disimpulkan bahwa setiap $A \in P(\mathbb{Z})$ bersifat *strongly nil clean*, sehingga $(P(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ merupakan ring *strongly nil clean.*

Contoh 3.2.5
Diberikan ring $(M_2(\mathbb{Z}_2), +, \cdot)$. Selidiki apakah $(M_2(\mathbb{Z}_2), +, \cdot)$ adalah ring *strongly nil clean*.
Bukti
Berdasarkan Contoh 3.1.5 telah dibuktikan bahwa tidak semua elemen dari $M_2(\mathbb{Z}_2)$ *strongly nil clean*, sehingga $(M_2(\mathbb{Z}_2), +, \cdot)$ bukan ring *strongly nil clean.*

Teorema 3.2.6
Suatu ring R adalah *strongly nil clean* jika dan hanya jika $R/J(R)$ adalah ring Boolean dan $J(R)$ adalah himpunan nilpoten.
Bukti.
$(\Longrightarrow)$ Diketahui R adalah *strongly nil clean*, sehingga R adalah *uniquely strongly clean*, sehingga $R/J(R)$ adalah Boolean. Berdasarkan Proposisi 2.5.31, $R/J(R)$ adalah Boolean. Selanjutnya, misalkan $r \in J(R)$ dan $r = n + d$ adalah dekomposisi *strongly nil clean*, karena $R/J(R)$ adalah Boolean dan n adalah nilpoten, diperoleh $n \in J(R)$. Oleh sebab itu, $d = r - n \in J(R)$. Asumsikan $d = 0$ diperoleh $r = n$ adalah nilpoten.

($\Leftarrow$)Misalkan $r \in R$. Diketahui $J(R)$ nilpoten, sehingga berdasarkan Teorema 3.1.12, $r - r^2 \in J(R)$. Karena $J(R)$ nilpoten sehingga terdapat $d \in Id(R)$ dan $r - d \in J(R)$. Oleh karena itu, $r = d + (r - d) + d = n + d$ adalah dekomposisi *strongly nil clean*. Jadi, R adalah *strongly nil clean*.

Contoh 3.2.7
Diketahui pada Contoh 3.2.2, ring $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$, sedemikian sehingga $\mathbb{Z}_8$ adalah *strongly nil clean*. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_8/J(\mathbb{Z}_8)$ adalah Boolean dan $J(\mathbb{Z}_8)$ adalah nilpoten.
Bukti
Sebelum ditunjukkan ketentuan tersebut berlaku, akan ditunjukkan terlebih dahulu Jacobson radikal dari ring $\mathbb{Z}_8$ atau $J(\mathbb{Z}_8)$. $J(\mathbb{Z}_8)$ adalah $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$, didapat $\mathbb{Z}_8/J(\mathbb{Z}_8)$ adalah $J(\mathbb{Z}_8) + \bar{0}$ dan $J(\mathbb{Z}_8) + \bar{1}$. Selanjutnya akan dibuktikan ketentuan pertama,

Tabel 3.8 Operasi kuadrat antara elemen dari $\mathbb{Z}_8/J(\mathbb{Z}_8)$.

$\boldsymbol{a \in \mathbb{Z}_8/J(\mathbb{Z}_8)}$	$J(\mathbb{Z}_8) + \bar{0}$	$J(\mathbb{Z}_8) + \bar{1}$
$\boldsymbol{a^2}$	$J(\mathbb{Z}_8) + \bar{0}$	$J(\mathbb{Z}_8) + \bar{1}$

Karena untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_8/J(\mathbb{Z}_8)$ adalah elemen idempoten, sehingga $\mathbb{Z}_8/J(\mathbb{Z}_8)$ adalah ring Boolean. Kemudian, karena $J(\mathbb{Z}_8)$ sama dengan $N(\mathbb{Z}_8)$ maka jelas $J(\mathbb{Z}_8)$ adalah nilpoten .

Proposisi 3.2.8
Misalkan R adalah ring dan I adalah nil ideal di R. R adalah ring *strongly nil clean* jika dan hanya jika R/I adalah ring *strongly nil clean*.
Bukti.
($\Rightarrow$)Misalkan R adalah ring *strongly nil clean*, maka untuk setiap $r \in R$ berlaku $r = n + d$, dengan $n \in N(R)$ dan $d \in Id(R)$. Berdasarkan Lemma 2.4.18, untuk $d \in Id(R)$ terdapat $\bar{d} \in Id(R/I)$, sehingga $\bar{n} = \bar{r} - \bar{d}` \in N(R/I)$. Ini menunjukkan bahwa $\bar{r} \in R/I$ adalah *strongly nil clean*. Jadi R/I adalah ring *strongly nil clean.*

($\Leftarrow$)Misalkan R/I adalah ring *strongly nil clean*, maka untuk setiap $\bar{r} \in R/I$ berlaku $\bar{r} = \bar{n} + \bar{d}$, dimana $\bar{n} \in N(R/I)$ dan $\bar{d} \in Id(R/I)$. Berdasarkan Lemma 2.4.18, untuk $\bar{d} \in Id(R/I)$ terdapat $d \in Id(R)$ dan $n = r - d \in N(R)$ sehingga $r \in R$ adalah *strongly nil clean.* Jadi R adalah ring *strongly nil clean.* ■

Contoh 3.2.9

Diketahui ring $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ dan himpunan $I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ adalah nil ideal. Berdasarkan Contoh 3.2.2 $\mathbb{Z}_8$ adalah ring *strongly nil clean*. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_8/I$ adalah ring *strongly nil clean*.

Bukti.

Berdasarkan Definisi 2.3.23, diperoleh $\mathbb{Z}_8/I = \{\bar{0} + I, \bar{1} + I\}$, sehingga $Id(\mathbb{Z}_8/I) = \{\bar{0} + I, \bar{1} + I\}$, $N(\mathbb{Z}_8/I) = \{\bar{0} + I\}$ dan $U(\mathbb{Z}_8/I) = \{\bar{1} + I\}$. Himpunan elemen *strongly nil clean* di $\mathbb{Z}_8/I$ adalah $\{\bar{0} + I, \bar{1} + I\}$. Akan diselidiki apakah $\mathbb{Z}_8/I$ adalah ring *strongly nil clean*.

Tabel 3 9 Hasil dari $r = n + d$ di $\mathbb{Z}_8/I$

$\bar{n} + I \in \boldsymbol{N}(\mathbb{Z}_8/\boldsymbol{I})$	$\bar{d} + I \in \boldsymbol{Id}(\mathbb{Z}_8/\boldsymbol{I})$	$\boldsymbol{r} = (\bar{n} + \bar{d}) + \boldsymbol{I}$
$\bar{0} + I$	$\bar{0} + I$	$\bar{0} + I$
	$\bar{1} + I$	$\bar{1} + I$

Berdasarkan Tabel 3.9 diperoleh untuk setiap $r \in \mathbb{Z}_8/I$ adalah dekomposisi *strongly nil clean* dan memenuhi $(\bar{n} + I)(\bar{d} + I) = (\bar{d} + I)(\bar{n} + I)$ yaitu berlaku komutatif terhadap pergandaan.

Proposisi 3.2.10

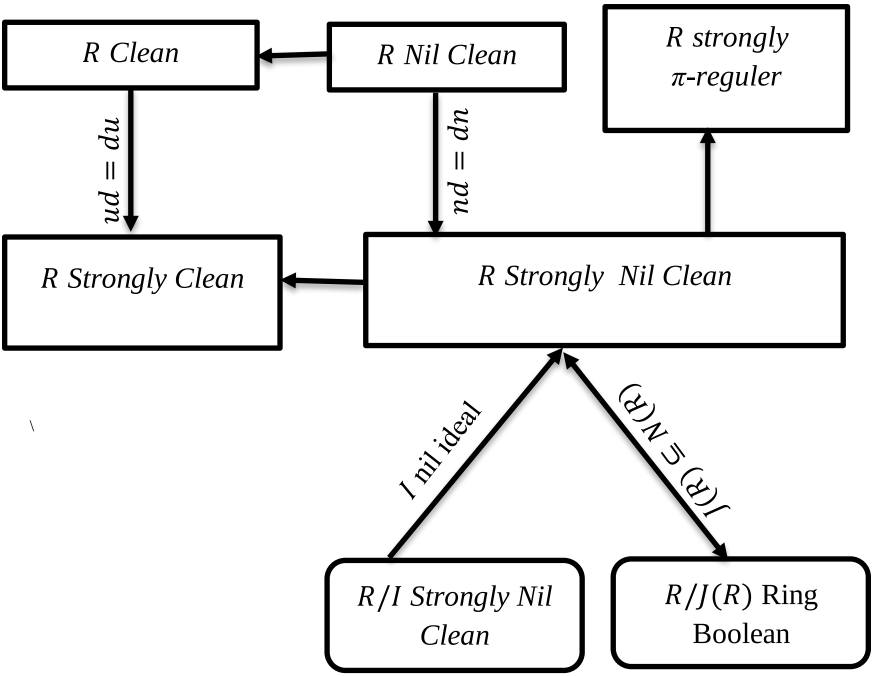
Misalkan R adalah ring. Setiap ring *strongly nil clean* adalah ring *strongly π-regular* sedemikian sehingga R juga *strongly clean*.

Bukti.

Misalkan R adalah *strongly nil clean*. Ambil sembarang $r \in R$, sehingga $-r \in R$. Maka $-r = n' + d'$ dimana $n' \in N(R)$ dan $d' \in Id(R)$. Akibatnya $r = (-1 - n') + (1 - d')$ adalah dekomposisi *strongly clean.* Karena berdasarkan Proposisi 2.4.31 bag 1, $1 + n$ adalah unit. Maka setiap $r \in R$ merupakan dekomposisi *strongly clean* yaitu $r = u + d$. Oleh karena itu, R adalah ring *strongly clean.* ■

Contoh 3.2.11
Diketahui pada Contoh 3.2.2, ring $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ adalah *strongly nil clean*. Berdasarkan Proposisi 2.5.37 dekomposisi *strongly π-regular* sama dengan dekomposisi *strongly clean*. Kemudian, berdasarkan Contoh 2.5.16 $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ adalah ring *strongly clean*. Oleh karena itu, $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ adalah ring *strongly π-regular* sedemikian sehingga R juga *strongly clean*.

Berdasarkan proposisi, teorema dan lemma yang sudah dibahas, dapat dibuat diagram hubungan sifat *strongly nil clean* pada ring.



Gambar 3.2 Hubungan Ring *Clean*, Ring *Strongly Clean*, Ring *Nil Clean*, Ring *Strongly π-regular dan* Ring *Strongly Nil Clean.*

Pada Gambar 3.3 dijelaskan, jika R bersifat *nil clean* maka r bersifat *clean* dan belum tentu berlaku sebaliknya. R yang bersifat *clean* menjadi *strongly clean* jika elemen idempoten dan unit saling komutatif terhadap pergandaan. R yang bersifat *nil clean* menjadi *strongly nil clean* jika elemen idempoten dan nilpoten saling komutatif terhadap pergandaan. Jika R bersifat *strongly nil clean* maka R bersifat *strongly clean* karena dekomposisi *strongly nil clean* dapat dibentuk sedemikian sehingga menjadi dekomposisi *strongly clean*. Kemudian, R *strongly nil clean* merupakan *strongly π-regular* karena dekomposisi *strongly nil clean* dapat dibentuk sedemikian sehingga menjadi dekomposisi *strongly π-regular*. Jika R bersifat *strongly nil clean* dan $J(R)$ adalah nilpoten maka $R/J(R)$ ring Boolean dan berlaku sebaliknya. Selanjutnya, jika R/I *strongly nil clean* dan memiliki I yang merupakan nil ideal maka R merupakan *strongly nil clean.*